



ЮРИДИКА

В. И. Вольский

О ВКЛАДЕ РАЙМУНДА ЛУЛЛИЯ В ТЕОРИЮ ГОЛОСОВАНИЯ¹

Ключевые слова: голосование, попарное сравнение, критерий, сумма рангов

¹ Работа частично поддержана грантом РФФИ № 08-01-00039-а.

² Плутарх 1994: 42—43.

³ Аристотель 1997: 271—343.

⁴ Лосев 1979: 45—55.

⁵ Письма 1983: кн. VIII, 14.

Принятие коллективных решений с помощью голосования восходит к античной эпохе. В «Сравнительных жизнеописаниях»² Плутарх описывает две процедуры, принятые во времена легендарного спартанского законодателя Ликурга (VIII—IX вв. до н.э.). Аристотель в «Афинской политике»³ рассказывает об остракизме — процедуре изгнания из государства посредством голосования черепками, введенной афинским реформатором Клисфеном (VI в. до н.э.). В Древнем Риме вопрос о даровании жизни раненому гладиатору решался путем голосования зрителей в Колизее⁴. Во II в. н.э. Плиний Младший в письме к Аристону обсуждал особенности голосования в римском Сенате⁵. Все эти процедуры в той или иной степени основывались на понятии «большинство голосов».

В первые века христианства наиболее распространенный способ избрания нового настоятеля монастыря заключался в том, что умирающий аббат сам называл имя своего преемника. Если этого не происходило, то самый старый и, как предполагалось, самый мудрый из монахов предлагал кандидатуру преемника, которая тотчас же принималась всей братией.

Постепенно данная практика уступила место избранию путем голосования или всеобщего одобрения. Папа Целестин I (422—432) писал: «Ни один епископ не должен быть навязан»⁶. «Каждый, кому предстоит управлять, должен быть избран всеми, кем он призывается руководить», — уточнял Лев I (440—461)⁷.

Долгое время главным принципом выборов было достижение единодушия, которое чаще всего выражалось через возгласы одобрения или немедленное принятие предложенной кандидатуры. Единодушие могло также достигаться в ходе пространных обсуждений и взаимных уступок.

С течением времени принцип единодушия стал заменяться принципом большинства голосов. В 1134 г. орден цистерцианцев постановил, что в случае разделения голосов следует придерживаться мнения большинства. Уже в XII в. в некоторых церковных сообществах начало использоваться тайное голосование. С 1179 г., в соответствии с решением III Латеранского собора, для избрания папы стало требоваться большинство в две трети голосов. А в конце следующего века папа

⁶ Цит. по: Мулен 2002: 174.

⁷ Там же.

⁸ Там же: 182.

Бонифаций VIII (1294—1303) повелел «не производить сравнение усердия или заслуг голосующих, но лишь подсчитывать голоса»⁸. В случае равного распределения голосов голос настоятеля монастыря или председателя должен был засчитываться за два.

Итак, как в античные времена, так и в эпоху раннего и высокого средневековья при принятии коллективных решений использовался принцип большинства голосов (единогласие, больше половины, больше двух третей). Принципиально другой подход к проблеме коллективного решения путем голосования предложил выдающийся поэт, философ и миссионер Раймунд Луллий (1235—1315), разработавший процедуры голосования, основанные на попарных сравнениях кандидатов.

Будучи хорошо известен своими трудами в области философии, богословия и литературы, Луллий как один из основателей науки о коллективном принятии решений оказался незаслуженно забыт в России. Цель этой статьи — попытаться хотя бы частично восстановить историческую справедливость, описав тот вклад, который был внесен Луллием в теорию голосования.

* * *

⁹ Lull 1283: 17.

Раймунд Луллий (лат. Raymundus Lullius, каталан. Ramon LLull) родился в городе Пальме на острове Мальорка. Он принадлежал к знатному и богатому роду и провел свою молодость в кутежах при дворе арагонского короля Якова I Завоевателя. В возрасте 30 лет он оставил семью и поселился на пустынной горе Мирамар, где впоследствии несколько его учеников основали маленький монастырь. В своей автобиографии (1311) Луллий говорит, что его обращение произошло после того, как ему было видение Христа, который попросил его написать «книгу, лучшую книгу в мире», направленную против заблуждений «неверных»⁹. Над этой книгой, известной под названиями «Ars Generalis Ultima» («Окончательное общее искусство») и «Ars Magna» («Великое искусство»), Луллий работал многие годы.

Твердо веря не только в истинность христианства, но и в его совершенную разумность, Луллий не сомневался в возможности обращения «неверных» путем убеждения. Получив в Парижском университете степень доктора теологии, он активно занялся миссионерской деятельностью и изучением восточных языков. За свою жизнь он трижды совершал миссионерские поездки в северную Африку (в район современных Туниса и Алжира), где проповедовал идеи христианства. В своих теологических работах он часто приводил математические аргументы для подтверждения истинности христианского учения.

Знаток иудейской и мусульманской теологии, Луллий был одним из родоначальников европейской арабистики. В целях специальной подготовки миссионеров он добился регулярного преподавания восточных языков в европейских университетах.

¹⁰ LLull s.a.¹¹ LLull 1283.¹² LLull (1299). Исследователи полагают, что сохранившийся рукописный текст этого трактата был переписан с оригинала Николаем Кузанским в XV в. (см. Hägele, Pukelsheim 2001).¹³ Hägele, Pukelsheim 2001.

Луллий является основоположником и классиком каталанской литературы, одним из крупнейших лириков своего времени.

Наследие Луллия насчитывает около 300 сочинений, написанных главным образом по-каталански и по-арабски. Некоторые из его произведений сохранились в латинском переводе.

Проблемы голосования затрагивались Луллием в трактате «Artifitium electionis personarum» (создан не позднее 1283 г.)¹⁰, в 24-й главе романа «Blanquerna» (1283)¹¹, а также в трактате «De arte electionis» (1299)¹². Представленное ниже описание трех предложенных Луллием процедур голосования производится на основе английского перевода его оригинальных текстов, написанных на каталанском языке¹³.

I. Парное сравнение кандидатов. В трактате «Artifitium electionis personarum» Луллий рассматривает ситуацию, когда 16 монахов должны избрать из своей среды прелата монастыря. Монахов Луллий обозначает буквами латинского алфавита: *b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m, n, o, p, q, r*.

Далее строится таблица, имеющая матричную структуру (см. рис. 1). Эта таблица содержит 120 ячеек, в которые помещены все возможные сочетания пар монахов.

Рисунок 1

<i>bc</i>	<i>cd</i>	<i>de</i>	<i>ef</i>	<i>fg</i>	<i>gh</i>	<i>hi</i>	<i>ik</i>	<i>kl</i>	<i>lm</i>	<i>mn</i>	<i>no</i>	<i>op</i>	<i>pq</i>	<i>qr</i>
<i>bd</i>	<i>ce</i>	<i>df</i>	<i>eg</i>	<i>fh</i>	<i>gi</i>	<i>hk</i>	<i>il</i>	<i>km</i>	<i>ln</i>	<i>mo</i>	<i>np</i>	<i>oq</i>	<i>pr</i>	
<i>be</i>	<i>cf</i>	<i>dg</i>	<i>eh</i>	<i>fi</i>	<i>gk</i>	<i>hl</i>	<i>im</i>	<i>kn</i>	<i>lo</i>	<i>mp</i>	<i>nq</i>	<i>or</i>		
<i>bf</i>	<i>cg</i>	<i>dh</i>	<i>ei</i>	<i>fk</i>	<i>gl</i>	<i>hm</i>	<i>in</i>	<i>ko</i>	<i>lp</i>	<i>mq</i>	<i>nr</i>			
<i>bg</i>	<i>ch</i>	<i>di</i>	<i>ek</i>	<i>fl</i>	<i>gm</i>	<i>hn</i>	<i>io</i>	<i>kp</i>	<i>lq</i>	<i>mr</i>				
<i>bh</i>	<i>ci</i>	<i>dk</i>	<i>el</i>	<i>fn</i>	<i>gn</i>	<i>ho</i>	<i>ip</i>	<i>kq</i>	<i>lr</i>					
<i>bi</i>	<i>ck</i>	<i>dl</i>	<i>em</i>	<i>fn</i>	<i>go</i>	<i>hp</i>	<i>iq</i>	<i>kr</i>						
<i>bk</i>	<i>cl</i>	<i>dm</i>	<i>en</i>	<i>fo</i>	<i>gp</i>	<i>hq</i>	<i>ir</i>							
<i>bl</i>	<i>cm</i>	<i>dn</i>	<i>eo</i>	<i>fp</i>	<i>gq</i>	<i>hr</i>								
<i>bm</i>	<i>cn</i>	<i>do</i>	<i>ep</i>	<i>fq</i>	<i>gr</i>									
<i>bn</i>	<i>co</i>	<i>dp</i>	<i>eq</i>	<i>fr</i>										
<i>bo</i>	<i>cp</i>	<i>dq</i>	<i>er</i>											
<i>bp</i>	<i>cq</i>	<i>dr</i>												
<i>bq</i>	<i>cr</i>													
<i>br</i>														

По мнению Луллия, при оценке кандидатов следует исходить из трех критериев: (1) честность и святость жизни, (2) знания и мудрость, (3) состояние здоровья. Соответственно, перед голосованием подготавливаются три одинаковых экземпляра таблицы — по таблице для каждого критерия.

Все монахи собираются в одном помещении, и начинается собственно процедура голосования. Прежде всего каждый монах должен поклясться на Евангелии, что при голосовании он будет принимать во внимание эти три критерия.

Далее два монаха, обозначенные в списке буквами b и c , покидают помещение. После этого каждый из оставшихся 14 монахов должен решить, кто из покинувших помещение лучше удовлетворяет каждому из критериев, то есть должен совершить попарное сравнение этих двух монахов по трем критериям.

В первой таблице точкой отмечается монах (b или c), получивший больше голосов по первому критерию; во второй — по второму, в третьей — по третьему критерию. Если по какому-либо критерию оба монаха получили равное количество голосов (по семь), то они оба помечаются точками в таблице, соответствующей этому критерию.

После этого монахи b и c возвращаются, и описанный выше процесс повторяется для монахов b и d , затем для монахов b и e и т.д. После завершения этой процедуры (заметим, весьма и весьма длительной, так как необходимо сравнить 120 пар монахов) для каждого из 16 монахов подсчитываются точки, проставленные во всех трех таблицах. Избранным на должность настоятеля считается тот, у которого суммарное число точек во всех таблицах максимально.

В случае если максимальное число точек оказывается сразу у нескольких монахов, эти монахи снова попарно покидают помещение, а оставшиеся, еще раз дав клятву на Евангелии, опять сравнивают их по указанной схеме. Если же и после этого два монаха набирают одинаковое число точек, выбор настоятеля осуществляется посредством жребия.

Луллий уверен, что использование данной процедуры полностью исключает возможность мошенничества и покупки церковной должности, позволяя выбрать наиболее достойного.

Опишем рассмотренную процедуру голосования в иных терминах.

Для множества кандидатов $A = \{x, y, \dots, z\}$ по каждому из трех критериев строятся три матрицы смежности $T_{xy}^i = \|t_{xy}^i\|$, $i = 1, 2, 3$ по следующему правилу:

для всех $x, y \in A$: $t_{xy}^i = 1$, если половина или более избирателей предпочитают кандидата x кандидату y ;
 $t_{xy}^i = 0$, если менее половины избирателей предпочитают кандидата x кандидату y .

После того как построены три матрицы

$$T^1 = \|t_{xy}^1\|, T^2 = \|t_{xy}^2\|, T^3 = \|t_{xy}^3\|,$$

для каждого кандидата $x \in A$ подсчитывается следующее число:

$$f(x) = \sum_{y \in A} t_{xy}^1 + \sum_{y \in A} t_{xy}^2 + \sum_{y \in A} t_{xy}^3.$$

Победителем объявляется кандидат $x \in A$, у которого значение $f(x)$ максимально:

$$x = \arg \max_{y \in A} f(y).$$

¹⁴ Copeland 1951. Подробное описание этой процедуры см. Вольский, Лезина 1991.

Построение матриц смежности $T_{xy}^i = \|t_{xy}^i\|$ и подсчет строчных сумм по этим матрицам, как это предписывает предложенная Луллием процедура, полностью совпадает с процедурой Коупленда, появившейся в середине XX в.¹⁴

II. Попарное сравнение кандидатов с привлечением коллегии выборщиков. В главе 24 романа «Blanche» описывается следующая ситуация. Когда после смерти настоятельницы одного из женских монастырей встал вопрос о выборе новой, образованная монахиня по имени Натана рассказала сестрам о замечательной процедуре, используя которую «мы постигнем истину, а постигнув истину, мы сможем найти сестру, которая более всего достойна стать нашей настоятельницей». (Важно отметить, что Луллий видел в голосовании не способ агрегирования индивидуальных мнений избирателей, но путь к постижению божественной истины, которая всегда одна и только одна.) Предложенная ею процедура состояла из двух этапов: на первом избиралась своего рода «коллегия выборщиков», на втором осуществлялся собственно выбор настоятельницы.

Всего в монастыре было 20 монахинь. На первом этапе следовало отобрать нечетное число монахинь (Натана особо подчеркнула, что число обязательно должно быть нечетным) — например, пять или семь (лучше семь).

Прежде всего монахини должны дать клятву, что будут правдивы. Потом у одной из 20 монахинь спрашивают (так, чтобы не слышали остальные), каким семи из 19 монахинь она бы доверила избрание настоятельницы. После этого тот же вопрос задают второй монахине, третьей и т.д. Затем подсчитываются голоса, которые получила каждая из монахинь, и отбираются семь получивших наибольшее число голосов. (Другими словами, применяется процедура выбора K лучших по шкале «число голосов».) На этом первый этап завершается.

В начале второго этапа отобранные монахини должны договориться, что будут оценивать кандидатов по четырем критериям:

- какая из кандидаток больше любит и знает Бога;
- какая из кандидаток больше любит и знает добродетели;
- какая из кандидаток сильнее всего ненавидит зло и пороки;
- какая из кандидаток больше всего подходит на должность настоятельницы.

Теперь эти семь монахинь должны решить, кто еще из сестер достоин избрания на должность настоятельницы монастыря. Такой расширенный список может включать, например, девять монахинь (семь отобранных плюс еще две монахини, которых отобранные монахини считают наиболее достойными). Затем, как и в первой из предложенных Луллием процедур, строится и заполняется таблица, в ячейки которой помещены все возможные сочетания пар кандидаток (в случае с девятью кандидатками таких ячеек 36; см. *рис. 2*).

Рисунок 2

<i>bc</i>	<i>cd</i>	<i>de</i>	<i>ef</i>	<i>fg</i>	<i>gh</i>	<i>hi</i>	<i>ik</i>
<i>bd</i>	<i>ce</i>	<i>df</i>	<i>eg</i>	<i>fh</i>	<i>gi</i>	<i>hk</i>	
<i>be</i>	<i>cf</i>	<i>dg</i>	<i>eh</i>	<i>fi</i>	<i>gk</i>		
<i>bf</i>	<i>cg</i>	<i>dh</i>	<i>ei</i>	<i>fk</i>			
<i>bg</i>	<i>ch</i>	<i>di</i>	<i>ek</i>				
<i>bh</i>	<i>ci</i>	<i>dk</i>					
<i>bi</i>	<i>ck</i>						
<i>bk</i>							

Далее, две монахини выходят из помещения, и оставшиеся «выборщицы» решают, какая из них более достойна должности настоятельницы, оценивая их по четырем критериям. Понятно, что, когда сравнивается пара из семи отобранных монахинь, их оценивают пять «выборщиц»; если в пару входит отобранная монахиня и одна из «дополнительных», число «выборщиц» возрастает до шести, а если две «дополнительные» монахини — до семи.

подавляющая часть современных исследователей наследия Луллия исходит из того, что точка в ячейке таблицы (например, в ячейке *bc*) ставится той из кандидаток, которую считают лучшей большинство оценивающих их монахинь, причем с учетом всех четырех критериев сразу. (Предположим, что монахини *b* и *c* входили в число отобранных и, соответственно, их оценивают пять монахинь. Пусть три из пяти убеждены, что монахиня *b* с учетом всех четырех критериев предпочтительнее монахини *c*, а две полагают, что *c* лучше, чем *b*. Тогда в паре *bc* точка ставится монахине *b*.) При такой интерпретации, как и в рассмотренном выше случае, выигрывает кандидатка, победившая в наибольшем числе попарных сравнений, то есть второй этап этой процедуры эквивалентен процедуре Коупленда.

Однако возможна и другая трактовка. Некоторые современные исследователи полагают, что в фразе Луллия «избирается та, которая получила большинство голосов в большинстве ячеек» слова «в боль-

¹⁵ См., напр. McLean, Lorrey 2007.

шинстве ячеек» являются лишними, несущественными¹⁵. Тогда эта процедура приобретает совсем иной вид.

В каждой ячейке таблицы подсчитывается число критериев, по которым один кандидат побеждает другого при попарном сравнении. Скажем, если в ячейке bc кандидат b оказался лучше (согласно оценке большинства выборщиков) кандидата c по трем критериям, а кандидат c превзошел кандидата b по одному критерию, то кандидату b в этой ячейке ставится три точки, а кандидату c — одна (напомним, что число критериев равно четырем). Затем для каждого кандидата подсчитывается сумма точек по всем ячейкам, где присутствует этот кандидат. При такой интерпретации процедура становится близкой по духу к процедуре, предложенной Жаном Шарлем Борда (1733—1799) в 1784 г.¹⁶

¹⁶ Borda 1784. Описание процедуры Борда см. Вольский, Лезина 1991.

Можно предположить, что, включая в свою процедуру этап избрания «коллегии выборщиков», Луллий хотел сократить время, которое необходимо затратить на определение победителя. Ведь если бы процедура применялась для всех 20 монахинь, то пришлось бы заполнять таблицу не из 36, а из 190 ячеек:

$$\frac{n \times (n - 1)}{2} = \frac{20 \times (20 - 1)}{2} = 190 \text{ ячеек.}$$

III. Последовательное исключение кандидатов. Процедура голосования, описанная Луллием в трактате «De arte electionis», кардинально отличается от первых двух, хотя она также основана на попарных сравнениях кандидатов.

В начале трактата Луллий подробно объясняет, почему Святой Церкви необходимо правильным образом выбирать иерархов, которые смогут успешно бороться с «неверными» и еретиками. Помочь в решении этой задачи, с его точки зрения, способна следующая процедура.

Допустим, имеется девять кандидатов на вакантную должность настоятеля монастыря, приора или епископа: $b, c, d, e, f, g, h, i, k$. (Кандидаты расположены именно в таком строго зафиксированном порядке.) Они должны выбрать из своего числа того, кто займет эту должность.

Прежде всего все кандидаты должны дать клятву, что изберут самого достойного. После этого первые два кандидата (b и c) отходят в сторону — так, чтобы видеть и слышать, что говорят остальные семь кандидатов. Каждый из этих семи кандидатов высказывает свое мнение о том, который из двух кандидатов больше подходит для данной должности. Победивший в этом попарном сравнении (то есть кандидат, набравший больше голосов, чем соперник) остается стоять в стороне, а проигравший возвращается в основную группу. К победителю в первом попарном сравнении подходит кандидат, занимающий следующую позицию в списке (d), и т.д. Процедура повторяется до тех пор, пока через нее не пройдут все кандидаты вплоть до k . Победитель в этой последней паре и объявляется избранным.

Таким образом, победитель определяется за $n - 1$ шагов, где n — число кандидатов. Очевидно, чем дальше стоит кандидат от начала списка, тем больше у него шансов занять вакантную должность.

По мнению Луллия, данная процедура голосования гарантирует от обмана: поскольку избрание происходит открыто, избирателям (которые сами являются кандидатами) будет стыдно голосовать неискренне.

В основу описанной выше процедуры положен метод последовательного исключения кандидатов в процессе голосования. Подобные процедуры используются и в настоящее время, например в законодательных органах США. Так, в Конгрессе США при рассмотрении вопроса о внесении поправок в какой-либо документ принята следующая процедура. Допустим, имеется несколько альтернативных вариантов поправок. Тогда на голосование выносится исходный документ (*status quo*) и стоящий первым по порядку вариант поправки. Победитель в этом попарном сравнении ставится на голосование со вторым вариантом поправки и т.д. На последнем этапе на голосование выносится вариант, победивший на предпоследнем этапе, вместе с исходным документом.

И первая, и вторая процедуры голосования, предложенные Луллием, требуют

$$\frac{n \times (n - 1)}{2}$$

попарных сравнений, где n — число всех кандидатов. Однако во втором случае число кандидатов существенно меньше (в него входят лишь члены «коллегии выборщиков» плюс несколько «дополнительных»), что значительно сокращает время, необходимое для выявления победителя. Еще меньше времени занимает третья процедура, предполагающая всего $n - 1$ попарных сравнений кандидатов.

* * *

Луллий первым в мире разработал процедуры голосования, основанные не на понятии «большинство голосов», а на попарных сравнениях кандидатов избирателями. Французский философ, математик, экономист и публицист Жан Антуан Никола Карита, маркиз де Кондорсе (1743—1794), использовавший метод попарных сравнений в работе, опубликованной в 1785 г.¹⁷, который вместе со своим коллегой по Парижской академии наук Борда, предложившим в 1784 г. осуществлять выбор лучшего кандидата по сумме рангов в упорядочениях избирателей, считается родоначальником теории голосования, по сути, лишь перекрывает то, что пятью столетиями ранее было открыто Луллием.

¹⁷ *Caritat (Condorcet) 1785.*

Библиография

- Аристотель. 1997. *Политика. Афинская полития.* — М.
 Вольский В.И., Лезина З.М. 1991. *Голосование в малых группах: Процедуры и методы сравнительного анализа.* — М.

- Лосев А.Ф.** 1979. *Эллинистически-римская эстетика I—II вв. н.э.* — М.
- Мулен Л.** 2002. *Повседневная жизнь средневековых монахов Западной Европы X—XV веков.* — М.
- Письма Плиния Младшего.** 1983. — М.
- Плутарх.** 1994. *Сравнительные жизнеописания.* — М.
- Borda J.C.** 1784. *Mémoire sur les élections au scrutin. Histoire de l'Académie Royale des Sciences pour 1781.* — P.
- Caritat M.J.A.N.,** marquis de Condorcet. 1785. *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix.* — P.
- Copeland A.N.** 1951. A Reasonable Social Welfare Function (Mimeo) // *University of Michigan Seminar of Application of Mathematics to the Social Sciences.* — Ann Arbor.
- Hägele G.,** Pukelsheim F. 2001. LLull's Writings on Electoral Systems // *Studia Lulliana.* Vol. 41.
- LLull R.** Artificium electionis personarum // *Biblioteca Apostolica Vaticana. Cod. Vat. lat. 9332. F. 11r—12v.*
- LLull R.** (1283) Blanquerna // *Bayerische Staatsbibliothek. Cod. Hisp. 67. F. 32v—34r.*
- LLull R.** (1299) De arte electionis // *Sankt Nikolaus — Hospital / Cusanusstift. Cod. Cus. 83. F 47v—48r.*
- McLean I.,** Lorrey H., Colomer J. 2007. Voting in the Medieval Papacy and Religious Orders // *Lecture Notes in Artificial Intelligence.* Vol. 4617.