



В. И. Вольский

РАБОТЫ ЧАРЛЬЗА ЛЮТВИДЖА ДОДЖСОНА В ОБЛАСТИ ТЕОРИИ ГОЛОСОВАНИЯ

Ключевые слова: Доджсон, процедура голосования, кандидаты, избиратели, предпочтения, попарные сравнения

Чарльз Лютвидж Доджсон (1832—1898 гг.) широко известен как автор сказок «Алиса в стране чудес» и «Алиса в Зазеркалье», а также ряда других литературных произведений, опубликованных под псевдонимом Льюис Кэрролл. Но помимо писательской деятельности важное место в жизни Доджсона занимали исследования в таких областях математики, как геометрия, матричная алгебра, математическая логика, теория голосования и пропорциональное представительство.

В настоящей статье рассматривается вклад Доджсона в теорию голосования. За период с 1873 по 1876 г. им было написано три работы, посвященные этой тематике, — «Обсуждение различных процедур при проведении выборов», «Предложения относительно оптимального метода учета голосов в ситуации, когда на голосование выносятся более двух альтернатив» и «Метод учета голосов при наличии более чем двух исходов»¹.

Доджсон учился, а затем в течение 26 лет читал лекции в Крайст-Черч — одном из крупнейших аристократических колледжей Оксфордского университета. В уставе колледжа от 1867 г. говорилось, что «кандидат, получивший большинство голосов на выборах, считается избранным». В своих работах Доджсон критически осмысливает понятие «большинство голосов», рассматривая парадоксальные ситуации, которые могут возникнуть при его использовании, и предлагает новые подходы к принятию коллективных решений.

¹ Dodgson 1873, 1874, 1876. *Тексты этих трех работ перепечатаны в Black 1958.*

Критика существующих процедур голосования

Для демонстрации уязвимых сторон известных ему процедур голосования Доджсон анализирует возможные распределения предпочтений n избирателей, выбирающих между кандидатами a , b , c и d . Распределения предпочтений отражены в таблицах, где количество столбцов соответствует числу избирателей, а кандидаты ранжированы в зависимости от места, которое они занимают в предпочтениях каждого из участников голосования.

² См. Dodgson 1873.

Процедура «относительное большинство голосов» (избранным считается кандидат, набравший больше голосов, чем другие).

В случае применения этой процедуры при распределении предпочтений, представленном в *табл. 1*, победителем окажется кандидат *b*, которого почти две трети избирателей (7 из 11) оценили как наилучшего. Интуитивно ясно, что в данной ситуации гораздо больше оснований быть избранным имеет кандидат *a*, которого 3 избирателя поставили на первое место, а остальные 8 — на второе.

Таблица 1	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>
	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>c</i>
	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>

Процедура «простое большинство голосов» (избранным считается кандидат, набравший более половины голосов).

При распределении предпочтений, представленном в *табл. 2*, применение этой процедуры принесет победу кандидату *b*, неприемлемому для почти половины голосовавших (5 из 11). По мнению Доджсона, в данном случае волеизъявлению избирателей больше соответствовало бы избрание кандидата *a*, набравшего на один голос меньше победителя, но при этом не опускающегося ниже второго места в предпочтениях участников голосования.

Таблица 2	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>
	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>d</i>
	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>c</i>
	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>

Процедура последовательного попарного сравнения кандидатов. В соответствии с этой процедурой из списка кандидатов случайным образом отбираются два кандидата, которые предлагаются избирателям для голосования. Проигравший при попарном сравнении исключается из рассмотрения, а победитель сравнивается со следующим выбранным случайным образом кандидатом и т.д. Победивший в последнем попарном сравнении кандидат считается избранным.

Если при распределении предпочтений, представленном в *табл. 3*, первыми сравниваются кандидаты *a* и *b*, то из дальнейшего рассмотрения исключается кандидат *a*. Между тем этот кандидат выглядит наилучшим в глазах пяти избирателей и не опускается ниже третьего места в предпочтениях остальных, тогда как его соперник является лучшим лишь для двоих участников голосования, а четверо считают его наилучшим. Более того, при любой последовательности дальнейших попарных сравнений окончательно избранным окажется кандидат *c*, который выбыл бы из игры уже на первом этапе, если бы сравнивался с кандидатом *a*.

Таблица 3

<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>
<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>
<i>b</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>
<i>d</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>

Процедура последовательного исключения кандидатов. Согласно этой процедуре на каждом шаге из рассмотрения исключается кандидат, получивший наименьшее число первых мест в предпочтениях избирателей.

При распределении предпочтений, представленном в *табл. 4*, на первом же этапе из борьбы выбывает кандидат *a*, входящий в число двух наиболее предпочтительных для всех избирателей. При этом победителем оказывается кандидат *c*, который является наихудшим для четверых избирателей и наилучшим — лишь для троих.

Таблица 4

<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>a</i>
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>d</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>d</i>
<i>c</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>b</i>

Метод балльных оценок. В соответствии с этим методом каждому избирателю предоставляется фиксированное число баллов, и он может приписать все баллы одному кандидату или распределить их между несколькими. Избранным считается кандидат, получивший максимальное суммарное число баллов.

Главный недостаток этого метода, по мнению Доджсона, заключается в том, что он не учитывает психологии избирателей. Стремясь обеспечить победу наиболее предпочтительному для себя кандидату, каждый избиратель, скорее всего, припишет ему все баллы, и в результате рассматриваемый метод окажется равнозначен процедуре «относительное большинство голосов» со всеми присущими ей изъянами.

Метод номинации. При использовании этой процедуры избирателям предлагается один из кандидатов, представленных в бюллетене, и они должны проголосовать за или против него. Однако, как отмечает Доджсон, избиратель проголосует за этого кандидата только в том случае, если тот лидирует в его предпочтениях, и против, если считает его наихудшим. При любом другом раскладе избирателю будет сложно определиться со своим выбором, ибо он не знает, какой кандидат будет представлен для голосования на следующем этапе — более или, напротив, менее предпочтительный для него.

Поэтому в ситуации, когда кто-то из представленных в бюллетене кандидатов стоит на первом месте в предпочтениях большинства избирателей и именно с него начинается голосование, выбор победителя

по методу номинации, по сути, не будет отличаться от выбора по процедуре «простое большинство голосов».

Еще больше проблем возникнет при отсутствии такого кандидата. Так, при распределении предпочтений, отраженном в *табл. 5*, если на первом этапе избирателям будет предъявлен кандидат *a*, он будет отвергнут (так как 6 из 11 избирателей будут надеяться, что на каком-то из следующих этапов им будет предъявлен более предпочтительный для них кандидат). Между тем, по мнению Доджсона, именно этот кандидат достоин быть избранным, поскольку при сравнении с любым другим кандидатом ему отдают предпочтение 9 избирателей из 11.

Таблица 5

<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>c</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>
<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>c</i>

Процедура с дополнительной альтернативой «не проводить голосование». Согласно этой процедуре перед началом голосования избирателям предлагается ответить на вопрос: проводить голосование или нет? Если альтернатива «не проводить голосование» набирает более половины голосов, голосование не проводится. В противном случае применяется та или иная процедура голосования. Иными словами, в рассмотрение включается дополнительный «кандидат» («не проводить голосование»), которого Доджсон обозначает символом «0».

Анализируя данную процедуру, исследователь отмечает, что она способна работать лишь в ситуации, когда избиратели четко делятся на тех, кто предпочитает альтернативу «0» всем кандидатам, и тех, кто предпочитает даже худшего для себя кандидата альтернативе «0». Но такое встречается крайне редко. Как правило, какая-то часть избирателей рассуждает следующим образом: «Если бы я знал, что будет избран кандидат *c* или *d*, то голосовал бы за отказ от голосования, а если *a* или *b* — за его проведение».

При распределении предпочтений, представленном в *табл. 6*, альтернатива «0» не набирает большинства голосов, то есть голосование проводится. Однако какой бы из кандидатов ни был в итоге избран, 9 из 11 избирателей предпочли бы ему альтернативу «не проводить голосование».

Таблица 6

<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>0</i>
<i>0</i>	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>c</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>b</i>
<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>
<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>

Процедура с альтернативой «не проводить голосование», предъявляемой на заключительном этапе. В соответствии с этой процедурой сначала выявляется победитель по процедуре «простое большинство голосов», а затем перед избирателями ставится вопрос: считать ли победителя избранным или же отказаться от голосования?

Дефекты данной процедуры отчетливо видны при распределении предпочтений, представленном в *табл. 7*. На первом этапе здесь побеждает кандидат *b* (по правилу «простое большинство голосов»), а на втором — альтернатива «не проводить голосование», хотя 10 из 11 предпочли бы ей избрание кандидата *a*.

Таблица 7	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>0</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>
	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>0</i>
	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>
	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>
	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>

Новые подходы к принятию коллективного решения

Стремясь преодолеть изъяны, присущие проанализированным им процедурам голосования, Доджсон разработал три новые процедуры, позволяющие более точно учитывать предпочтения избирателей.

Модифицированный метод балльных оценок³. В соответствии с этой процедурой каждому из включенных в список кандидатов приписывается число баллов, отвечающее его месту в предпочтениях каждого избирателя.

Пусть избиратель имеет следующие предпочтения относительно включенных в список кандидатов *a*, *b*, *c*, *d*:

a
b
c
d.

Тогда кандидату *a* приписывается 3 балла, кандидату *b* — 2 балла, кандидату *c* — 1 балл, кандидату *d* — 0 баллов⁴. Затем для каждого кандидата подсчитывается сумма балльных оценок во всех упорядочениях избирателей, и победителем объявляется тот, кто набрал максимальную сумму баллов.

Как показывают приводимые в *табл. 8* данные, при применении этой процедуры во всех рассмотренных выше случаях (см. *табл. 1—7*) победу одерживает кандидат, который интуитивно представляется лучшим, но который проигрывает при использовании иных процедур.

Следует отметить, что описанная процедура полностью совпадает с процедурой, предложенной еще в XV в. Николаем Кузанским и заново изобретенной Ж.Ш.Борда в конце XVIII в.⁵ Известно, что с работами своих предшественников Доджсон знаком не был.

³ См. *Dodgson 1873*.

⁴ При добавлении альтернативы «не проводить голосование» в качестве одного из «кандидатов» занявшему первое место приписывается 4 балла, занявшему второе — 3 балла и т.д.

⁵ *Nicolaus Cusanus 1431* (см. также *Nicolas of Cusa 1996*); *Borda 1787*. Описание этой процедуры см., напр. *Вольский, Лезина 1991*; *Алексеров, Хабина, Шварц 2005*; *Мюллер 2007*; *Вольский 2011б*.

Таблица 8

Пример распределения предпочтений	Сумма баллов, рассчитанная в соответствии с модифицированным методом балльных оценок				
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	альтерна- тива «не проводить голосование»
Процедура «относительное большинство голосов»	25	12	20	9	
Процедура «простое большинство голосов»	27	18	11	10	
Процедура последовательного попарного сравнения кандидатов	23	15	14	14	
Процедура последовательного исключения кандидатов	24	15	14	13	
Метод номинации	27	17	14	8	
Процедура с дополнительной альтернативой «не проводить голосование»	21	21	20	10	38
Процедура с альтернативой «не проводить голосование», предъявляемой на заключительном этапе	37	33	16	5	19

⁶ См. Dodgson 1874.

Процедура учета голосов в ситуации, когда на голосование выносятся более двух альтернатив⁶. Процедура состоит из следующих этапов:

1. Составляется бюллетень, содержащий имена всех кандидатов (или названия всех альтернатив, если речь идет о голосовании по поводу каких-то предложений). После предварительного обсуждения избирателями в бюллетень может быть внесена и альтернатива «не проводить голосование». Избирательный бюллетень изготавливается в единственном экземпляре.
2. Избирательный бюллетень передается избирателям. Каждый избиратель пишет свое имя под именем наиболее предпочтительного для себя кандидата (или наименованием альтернативы).
3. Если какой-либо кандидат (альтернатива) получает заранее оговоренное избирателями большинство голосов, он считается избранным и процедура завершается.
4. При отсутствии такого кандидата (альтернативы) проводится попарное сравнение кандидатов (альтернатив). Если находится кандидат (альтернатива), побеждающий всех других в парном сравнении, он объявляется окончательным победителем.

Процедура, основанная на выявлении абсолютного победителя в попарных сравнениях кандидатов, была впервые предложена Раймун-

⁷ LLull 1283: ch. 24. Процедуры голосования, предложенные Луллием, подробно описаны в Вольский 2011а.

⁸ Carita (Condorcet) 1785.

дом Луллием в XIII в.⁷, а затем, независимо от Луллия, маркизом Кондорсе в конце XVIII в.⁸ Не будучи знаком с этими работами, Доджсон не только воспроизвел предлагаемый в них подход, но и, подобно Кондорсе, зафиксировал возможность циклов на мажоритарном графе ($a > b > c > a$), то есть ситуации, при которой абсолютного победителя в принципе не существует, и разработал оригинальную процедуру, позволяющую преодолеть цикличность предпочтений.

⁹ Dodgson 1876. **Процедура учета голосов при наличии более чем двух исходов⁹.** Процедура включает в себя следующие этапы:

1. Каждый избиратель указывает в бюллетене предпочтительного для себя кандидата (при этом альтернатива «не проводить голосование» включается в список как один из «кандидатов»). Если кто-то из кандидатов набирает простое большинство голосов, он объявляется избранным и процедура заканчивается.
2. При отсутствии такого кандидата избирателям предлагается указать в своих бюллетенях строгие упорядочения всех кандидатов. Если находится кандидат, который побеждает любого другого в парном сравнении, он объявляется избранным и процедура заканчивается.
3. Если абсолютного победителя в попарном сравнении не существует, то есть предпочтения избирателей носят «циклический» характер, вся совокупность кандидатов делится на два подмножества. К первому подмножеству относятся кандидаты, формирующие цикл, ко второму — все остальные. Если каждый кандидат из первого подмножества при попарном сравнении побеждает каждого кандидата из второго подмножества, последнее исключается из рассмотрения.
4. Для каждого из входящих в цикл кандидатов высчитывается, сколько изменений в избирательных бюллетенях надо произвести, чтобы при попарном сравнении он стал абсолютным победителем (в рамках данного цикла).
5. Результаты подсчетов доводятся до сведения избирателей, которые получают возможность внести изменения в упорядочение кандидатов в своих бюллетенях.
6. После этого вновь проводится попарное сравнение всех кандидатов. Если же и оно содержит цикл, выборы объявляются несостоявшимися.

Обосновывая целесообразность использования данной процедуры при принятии важных коллективных решений, Доджсон рассматривает ряд примеров, демонстрирующих ее преимущества по сравнению с процедурами относительного большинства голосов и последовательного исключения кандидатов, вводя принципиально новое понятие — степень превосходства одного кандидата над другим при попарном сравнении.

Пример 1. В голосовании участвуют 11 избирателей, предпочтения которых относительно кандидатов a, b, c, d представлены в табл. 9.

Таблица 9

a	a	a	a	b	b	b	c	c	c	d
d	d	b	b	c	c	d	b	b	b	c^*
c	c	d	d	a	a	c	d	d	d	b^*
b	b	c	c	d	d	a	a	a	a	a

При использовании процедуры «относительное большинство голосов» победителем является кандидат a . При попарном же сравнении кандидатов возникает цикл ($a > d > c > b > a$), в рамках которого каждый кандидат побеждает последующего.

Результаты попарных сравнений кандидатов отражены в *табл. 10*. В числителе дроби, расположенной на пересечении строки a и столбца b , приведено число избирателей, предпочитающих кандидата a кандидату b ; в знаменателе — число избирателей, предпочитающих кандидата b кандидату a . По аналогичному принципу построены дроби и на пересечении других строк и столбцов. Если значение дроби меньше единицы, то кандидат, обозначенный по строке, проигрывает при попарном сравнении кандидату, обозначенному по столбцу. В этом случае дробь заключается в скобки.

Таблица 10

	a	b	c	d
a		$7/4$	$7/4$	$(5/6)$
b	$(4/7)$		$6/5$	$(3/8)$
c	$(4/7)$	$(5/6)$		$6/5$
d	$6/5$	$(8/3)$	$(5/6)$	

Проанализировав данную таблицу, Доджсон обращает внимание на сомнительность победы кандидата a . Чтобы побеждать каждого другого кандидата в парном сравнении, ему необходимо как минимум четыре изменения в предпочтениях избирателей: по два перемещения вверх для избирателей №5 и №6. Более того, достаточно одного перемещения вниз (для избирателя №5 или №6), и он станет проигрывать каждому другому кандидату в парном сравнении. В свою очередь, проигравшему по правилу «относительное большинство голосов» кандидату b требуется лишь одно перемещение вверх (отмечено звездочками в *табл. 9*), чтобы побеждать в парном сравнении всех остальных кандидатов.

Пример 2. В голосовании участвуют 13 избирателей, предпочтения которых относительно кандидатов a, b, c, d представлены в *табл. 11*.

Здесь, как и в рассмотренном выше случае, при использовании процедуры «относительное большинство голосов» побеждает кандидат a . Однако анализ результатов попарных сравнений кандидатов (см. *табл. 12*) показывает, что при изменении предпочтений одного избирателя (отмечено звездочками в *табл. 11*) кандидат a будет про-

Таблица 11	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>
	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>
	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>a*</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>
	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b*</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>

Таблица 12		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
	<i>a</i>		(6/7)	(9/4)	7/6
	<i>b</i>	7/6		(3/10)	(4/9)
	<i>c</i>	(4/9)	10/3		(6/7)
	<i>d</i>	(6/7)	9/4	7/6	

игрывать в парном сравнении всем остальным кандидатам, а кандидат *b* станет абсолютным победителем.

Пример 3. В голосовании участвуют 15 избирателей, предпочтения которых относительно кандидатов *a*, *b*, *c*, *d* представлены в *табл. 13*. При попарном сравнении кандидатов возникает цикл: $a > b > c > d > a$.

Таблица 13	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>
	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c*</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d*</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>
	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>a</i>

В случае использования процедуры последовательного исключения кандидатов на первом этапе будет исключен кандидат *d* как имеющий наименьшее число первых мест в предпочтениях избирателей. Предпочтения избирателей относительно оставшихся кандидатов представлены в *табл. 14*. При попарном сравнении кандидатов возникает цикл: $a > b > c > a$.

Таблица 14	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>
	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>a</i>

На втором этапе исключается *c*, и победителем оказывается кандидат *a*. Между тем, как показывает анализ результатов попарных сравнений кандидатов для исходного распределения предпочтений избирателей (см. *табл. 15*), для того чтобы в парном сравнении побеждать всех остальных кандидатов, кандидату *a* нужно шесть изменений в предпочтениях избирателей, в то время как выбывшему на первом этапе кандидату *d* — всего одно (отмечено звездочками в *табл. 13*).

Таблица 15		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
	<i>a</i>		(7/8)	9/6	11/4
	<i>b</i>	8/7		(6/9)	11/4
	<i>c</i>	(6/9)	9/6		(6/7)
	<i>d</i>	(4/11)	(4/11)	8/7	

Пример 4. В голосовании участвуют 23 избирателя, предпочтения которых относительно кандидатов *a*, *b*, *c*, *d* представлены в табл. 16.

Таблица 16	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	
	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>c</i> *
	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i> *
	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>a</i>

¹⁰ См. описание процедур с дополнительной альтернативой «не проводить голосование» и с альтернативой «не проводить голосование», предъявляемой на заключительном этапе.

При использовании процедуры «относительное большинство голосов» победителем окажется кандидат *a*, при использовании процедуры последовательного исключения кандидатов — кандидат *c*. Однако если проанализировать результаты попарных сравнений кандидатов (см табл. 17), то обнаружится, что для абсолютной победы кандидату *a* необходимо как минимум пять изменений в предпочтениях избирателей, а кандидату *c* — даже шесть. Между тем кандидату *b* требуется лишь одно перемещение вверх (отмечено звездочками в табл. 16), чтобы побеждать всех остальных в парном сравнении.

Таблица 17		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
	<i>a</i>		16/7	(8/15)	(11/12)
	<i>b</i>	(7/16)		12/11	(5/18)
	<i>c</i>	15/8	(11/12)		
	<i>d</i>	12/11	18/5	(10/13)	

¹¹ Следует отметить, что указанная альтернатива имеет некоторое сходство с графой «none of the above», включаемой в ряде стран в избирательные бюллетени, а также с графой «против всех», отмененной в РФ в 2006 г.

На основе анализа данных примеров Доджсон приходит к заключению, что в случае, когда при попарных сравнениях кандидатов имеются циклы, в рассмотрение должна вводиться альтернатива «не проводить голосование», причем, поскольку предъявление ее на начальном и завершающем этапах, как было показано выше¹⁰, сопряжено с определенными проблемами, она должна включаться в бюллетень как один из «кандидатов»¹¹.

Работы Доджсона в области теории голосования интересны в нескольких отношениях. Во-первых, английский математик критически проанализировал ряд широко распространенных процедур голосования, наглядно продемонстрировав, что их использование способно породить парадоксальные ситуации, когда избирается кандидат, которого здравый смысл отказывается признавать лучшим. Во-вторых, ничего не зная о трудах предшественников (Луллия, Николая Кузанского, Борда и Кондорсе), он разработал процедуры голосования, основанные на сумме рангов и попарном сравнении кандидатов, и установил возможность возникновения циклов. В-третьих, он предложил принципиально новый подход к определению победителя в попарном сравнении кандидатов, введя понятие степени превосходства одного кандидата над другим. На этом понятии базируется процедура голосования, которая носит имя Доджсона¹².

¹² См., напр. Young 1977; Bartholdi, Tovey 1989; Ratliff 2001, 2002; Klamer 2004; Петровский 2009.

Библиография

- Алескеров Ф.Т., Хабина Э.Л., Шварц Д.А. 2005. *Бинарные отношения, графы и коллективные решения*. — М.
- Вольский В.И. 2011а. О вкладе Раймунда Луллия в теорию голосования // *Полития*. № 1.
- Вольский В.И. 2011б. Николай Кузанский и его система голосования // *Полития*. № 3.
- Вольский В.И., Лезина З.М. 1991. *Голосование в малых группах*. — М.
- Мюллер Д. 2007. *Общественный выбор III*. — М.
- Петровский А.Б. 2009. *Теория принятия решений*. — М.
- Bartholdi J., Tovey C.A., Trick M.A. 1989. Voting Schemes for Which It Can Be Difficult to Tell Who Won the Election // *Social Choice and Welfare*. Vol. 6. № 2.
- Black D. 1958. *The Theory of Committees and Elections*. — Cambridge.
- Borda J.C. 1787. *Mémoire sur les élections au scrutin. Histoire de l'Académie Royale des Sciences pour 1781*. — Paris.
- Carita M.J.A.N, marquis de Condorcet. 1785. *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*. — Paris.
- Dodgson C.L. 1873. *A Discussion on the Various Methods of Procedure in Conducting Elections*. — Oxford.
- Dodgson C.L. 1874. *Suggestion as the Best Method of Taking Votes, Where More than Two Issues Are to Be Voted on*. — Oxford.
- Dodgson C.L. 1876. *A Method of Taking Votes on More than Two Issues*. — Oxford.

Klamer C. 2004. The Dodgson Ranking and Its Relation to Kemeny's Method and Slater's Rule // *Social Choice and Welfare*. Vol. 23. № 1.

LLull R. (1283) Blanquerna // *Bayerische Staatsbibliothek. Cod. Hisp. 67. F. 32v—34r.*

Nicolas of Cusa: the Catholic Concordance. 1996. — Cambridge.

Nicolaus Cusanus. 1431. *De concordantia catholica.* — S.l.

Ratliff T.C. 2001. A Comparison of Dodgson's Method and Kemeny's Rule // *Social Choice and Welfare*. Vol. 18. № 1.

Ratliff T.C. 2002. A Comparison of Dodgson's Method and the Borda Count // *Economic Theory*. Vol. 20. № 2.

Young H.P. 1977. Extending Condorcet's Rule // *Journal of Economic Theory*. Vol. 16. № 2.