В.И.Вольский

Ж.-Ш. ДЕ БОРДА И МАРКИЗ ДЕ КОНДОРСЕ – РОДОНАЧАЛЬНИКИ ТЕОРИИ ГОЛОСОВАНИЯ

Ключевые слова: Борда, Кондорсе, процедура голосования, кандидаты, избиратели, предпочтения, попарные сравнения

Введение

С древнейших времен для принятия коллективных решений люди использовали голосование[1]. В «Сравнительных жизнеописаниях»[2] Плутарх описывает две процедуры, которые применялись в Спарте во времена легендарного законодателя Ликурга (IX—VIII вв. до н.э.). Аристотель в «Афинской политии»[3] рассказывает об остракизме — процедуре изгнания гражданина из государства посредством голосования черепками, введенной афинским реформатором Клисфеном (VI в. до н.э.). В Древнем Риме вопрос о даровании жизни раненому гладиатору решался путем голосования зрителей в Колизее[4]. Начиная с V в. голосование стало использоваться при избрании Римского папы и настоятелей монастырей[5].

И в античные времена, и в эпоху раннего и высокого Средневековья принятие коллективного решения через голосование базировалось на понятии «большинство голосов». В конце XIII в. каталонским философом и миссионером Раймундом Луллием были разработаны три принципиально новые процедуры голосования, основанные на попарных сравнениях кандидатов[6]. Спустя полтора столетия немецким философом и теологом Николаем Кузанским был предложен еще один подход к принятию коллективных решений, не связанный с понятием большинства голосов[7]. Однако ни Луллий, ни Николай Кузанский не привели никаких соображений, которые бы обосновывали преимущества предложенных ими процедур голосования, и эти процедуры, по сути, были забыты и лишь относительно недавно стали упоминаться в работах по истории науки[8].

Попытка критического анализа процедур голосования была предпринята только в конце XVIII в., когда два члена Французской королевской академии наук — Жан-Шарль де Борда (1733—1799) и Мари Жан Антуан Николя Карита, маркиз де Кондорсе (1743—1794) — впервые в мировой истории начали заниматься вопросами голосования как научной проблемой, привлекая для ее решения математический аппарат и метод анализа модельных ситуаций (то, что впоследствии получило название «умозрительные эксперименты»). Именно эти ученые по праву считаются основоположниками теории голосования.

[1] См. Алескеров, Ортешук 1995.

[2] Плутарх 1994: 42—43.

[3] Аристотель 1997: 271—343.

[4] Лосев 1979: 45—55.

[5] Муллен 2002: 172—188.

[6] Подробнее см. Вольский 2011а.

[7] См. Вольский 2011б.

[8] См., напр. Hägele, Pukelsheim 2001.

Вклад Ж.-Ш. де Борда в теорию голосования

16 июня 1770 г. на заседании Королевской академии наук Борда выступил с докладом, в котором представил разработанную им процедуру голосования[9]. Статья с описанием этой процедуры была напечатана в «Истории Королевской академии наук за 1781 г.»[10].

По заключению Борда, широко распространенный подход, в соответствии с которым победителем признается кандидат, получивший наибольшее число голосов, логичен лишь при условии, что в избирательный бюллетень внесены два кандидата. В подтверждение своего тезиса он рассматривает случай, когда в бюллетень включены три кандидата (*A*, *B* и *C*), а предпочтения 21 избирателя относительно этих кандидатов распределились так, как отражено на *рис. 1*[11].

[9] Примечательно, что данная процедура совпадает с процедурой, предложенной Николаем Кузанским в XV в., хотя с его разработками Борда знаком не был.

Рисунок 1

A	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*	*C*	*C*	*C*	*C*	*C*	*C*
B	*C*	*C*	*C*	*C*	*C*	*C*	*C*	*C*	*C*	*C*	*C*	*C*	*C*	*C*	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*
C	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*
8 избирателей								**7 избирателей**							**6 избирателей**					

Согласно правилу большинства голосов, побеждает кандидат *A*, получивший 8 голосов, хотя остальные 13 избирателей предпочли бы ему любого из альтернативных кандидатов.

Приведенный пример показывает, что у общепринятой процедуры определения победителя по большинству голосов имеется серьезный изъян. Чтобы избежать подобных ситуаций, считает Борда, необходимо учитывать не только то, какой из кандидатов кажется избирателю наилучшим, но и распределение его предпочтений применительно к другим кандидатам.

По мнению Борда, существуют две процедуры голосования, позволяющие решить эту проблему:

1) каждый избиратель в своем упорядочении кандидатов присваивает им числовую оценку;
2) проводится голосование по всем возможным парам кандидатов, то есть каждый кандидат попарно сравнивается с остальными.

Описывая первую процедуру, которую он называет «порядок качества кандидатов», Борда исходит из допущения, что если избиратель предпочитает кандидата *A* кандидату *B*, а кандидата *B* кандидату *C*, то превосходство *A* над *B* идентично превосходству *B* над *C*. Тогда если качество последнего кандидата в упорядочении (*C*) оценить числом a, то качество кандидата *B* можно оценить числом $a+b$, а качество кандидата *A* — числом $a+2b$. Аналогичным образом формируются числовые оценки кандидатов в упорядочениях других избирателей. Сумма числовых оценок, которые получил кандидат во всех упорядочениях избирателей, и будет составлять его итоговую (коллективную) числовую оценку[12].

Поскольку числа a и b могут быть любыми, Борда предлагает приравнять их к единице. В этом случае применительно к примеру, представленному на *рис. 1*, мы получаем следующую картину:

[10] Borda 1784.

[11] Количество столбцов в таблице соответствует числу избирателей, кандидаты ранжированы в зависимости от места, которое занимают в предпочтениях каждого из участников голосования.

[12] В современной литературе такую оценку принято называть суммой рангов кандидата в упорядочениях избирателей.

итоговая числовая оценка кандидата *A* — 8 · 3 + 13 · 1 = 37;
итоговая числовая оценка кандидата *B* — 7 · 3 + 7 · 2 + 7 · 1 = 42;
итоговая числовая оценка кандидата *C* — 6 · 3 + 14 · 2 + 1 · 1 = 47.

Таким образом, при данной процедуре голосования победу одержит кандидат С, вторым в коллективном решении будет кандидат В, а третьим — кандидат А; иными словами, результат будет прямо противоположен тому, что мы получим при использовании правила «большинство голосов» (*A* — 8 голосов, *B* — 7 голосов, *C* — 6 голосов).

Обозначив число первых, вторых и третьих мест в упорядочениях кандидатов через y, x и z, Борда выводит общую формулу числовой оценки кандидата:

$$3y + 2x + z\,.$$

Очевидно, что общее число избирателей равно

$$E = y + x + z\,.$$

В связи с этим числовую оценку кандидата можно представить как

$$2y + x + E\,.$$

А поскольку число E для всех кандидатов (*A*, *B*, *C*) одинаково, эту оценку правомерно упростить до

$$2y + x\,.$$

Рассмотрим теперь процедуру голосования, основанную на попарных сравнениях кандидатов избирателями.

В случае, когда в бюллетень внесены три кандидата (*A*, *B* и *C*), необходимо провести три попарных сравнения:

1) сравнение A с $B \rightarrow \begin{cases} a \text{ голосов за } A \\ b \text{ голосов за } B \end{cases}$

2) сравнение A с $C \rightarrow \begin{cases} a' \text{ голосов за } A \\ c \text{ голосов за } C \end{cases}$

3) сравнение B с $C \rightarrow \begin{cases} b' \text{ голосов за } B \\ c' \text{ голосов за } C \end{cases}$

Кандидат *A*, занимающий первое место в упорядочении кандидатов, получает два голоса при попарном сравнении с другими кандидатами — один голос при сравнении с кандидатом *B* и один голос при сравнении с кандидатом *C*. Соответственно, если он стоит на втором месте, то ему достается один голос (при попарном сравнении с кандидатом *B* или с кандидатом *C*), а если на третьем — ни одного. Следовательно, заключает Борда, общее число голосов, которое кандидат *A* получит при попарном сравнении с другими кандидатами (*B* и *C*), будет равно

$$a + a' = 2y + x,$$

то есть его числовая оценка окажется той же, что и при использовании процедуры «порядок качества кандидатов».

Для случая, представленного на *рис. 1*, при попарном сравнении кандидатов *A*, *B* и *C* получаем:

$$a = 8 \qquad b = 13 \qquad c = 13$$
$$a' = 8 \qquad b' = 8 \qquad c' = 13$$

Итоговые числовые оценки при попарном сравнении кандидатов будут иметь значения:

для кандидата A — $a + a' = 8 + 8 = 16$;

для кандидата B — $b + b' = 13 + 8 = 21$;

для кандидата C — $c + c' = 13 + 13 = 26$.

Другими словами, при данной процедуре голосования победу опять же одерживает кандидат С, вторым в коллективном решении оказывается кандидат В, а третьим — кандидат А.

Таким образом, использование обеих процедур дает идентичные результаты, однако поскольку при большом количестве кандидатов процедура, основанная на попарных сравнениях, становится неудобной, Борда высказывается в пользу процедуры «порядок качества кандидатов».

Как было показано выше, определение победителя по большинству голосов не всегда отражает реальные предпочтения избирателей. Так каким же должно быть большинство голосов, чтобы получившего его кандидата можно было признать справедливо избранным? Для ответа на этот вопрос Борда строит аналитические модели, вводя следующие обозначения:

m — число кандидатов;

E — число избирателей;

A — кандидат, получивший большинство голосов избирателей;

y — число избирателей, поставивших кандидата A на первое место в своих упорядочениях кандидатов;

B — кандидат, занявший второе место по числу голосов;

z — число избирателей, поставивших кандидата B на первое место в своих упорядочениях кандидатов.

Наиболее сомнительной победа кандидата A окажется в том случае, если в упорядочениях всех избирателей, не отдавших ему предпочтение, он занимает последнее место, в то время как в упорядочениях всех избирателей, не отдавших предпочтение кандидату B, тот занимает второе место. Соответствующая ситуация отражена на *рис. 2.*

Рисунок 2

m кандидатов

$$\{A,B,C,D,H\cdots K\}\left\{\begin{array}{l}
\underbrace{\underbrace{\begin{matrix}A\,A\cdots A\\ B\,B\cdots B\\ \cdot\ \ \cdot\ \ \ \cdot\\ \cdot\ \ \cdot\ \ \ \cdot\\ \cdot\ \ \cdot\ \ \ \cdot\\ \cdot\ \ \cdot\ \ \ \cdot\end{matrix}}_{y}\ \underbrace{\begin{matrix}B\,B\cdots B\\ \cdot\ \ \cdot\ \ \ \cdot\\ \cdot\ \ \cdot\ \ \ \cdot\\ \cdot\ \ \cdot\ \ \ \cdot\\ \cdot\ \ \cdot\ \ \ \cdot\\ A\,A\cdots A\end{matrix}}_{z}\ \begin{matrix}C\,D\,H\cdots K\\ B\,B\,B\cdots B\\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \ \cdot\\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \ \cdot\\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \ \cdot\\ A\,A\,A\cdots A\end{matrix}}_{E}
\end{array}\right.$$

Если приписать кандидату, поставленному в упорядочении избирателя на первое место, число m, то занявшему в этом упорядочении второе место следует приписать число $m-1$, а оказавшемуся на последнем — число 1.

При использовании процедуры «порядок качества кандидатов» итоговая числовая оценка кандидата A будет равна $my + E - y$, а итоговая числовая оценка кандидата $B - mz + (m - 1) \cdot (E - z)$.

Для того чтобы кандидат А был коллективно выбран по процедуре «порядок качества кандидатов», должно выполняться неравенство:

$$my + E - y > mz + (m - 1) \cdot (E - z),$$

или, если привести подобные члены:

$$y > \frac{z + (m - 2) \cdot E}{m - 1} \ (*).$$

В случае если число кандидатов $m = 2$, мы получаем:

$$y > z,$$

то есть процедура «порядок качества кандидатов» дает тот же результат, что и процедура выбора по большинству голосов.

Если кандидат B занимает первое место во всех упорядочениях кандидатов кроме тех, где на первом месте стоит кандидат A, i.e. $z = E - y$, то, подставив это выражение в неравенство (*), получаем:

$$y > E \cdot \frac{m - 1}{m}.$$

Тогда при наличии трех кандидатов ($m = 3$) $y > 2/3\ E$, то есть процедура «порядок качества кандидатов» всегда будет давать тот же результат, что и правило простого большинства, только если кто-то из кандидатов занимает первое место в упорядочениях более чем 2/3 избирателей.

Если $m = 4$, то $y > 3/4\ E$, и т.д.

Если же число кандидатов больше или равно числу избирателей (E ≥ m), $y > E - 1$, то есть в этом случае решение может быть принято только единогласно.

Стоит отметить, что вскоре после выхода в свет работы Борда предложенная им процедура стала использоваться при избрании членов Французской королевской академии наук. Однако это продолжалось недолго, и уже в 1800 г. по настоянию одного из своих новых членов Академия отказалась от нее. Имя этого нового члена Академии — Наполеон Бонапарт.

Вклад маркиза де Кондорсе в теорию голосования

В опубликованном в 1785 г. труде «Рассуждения о применении анализа к оценке выборов большинством голосов»[13] Кондорсе, подобно Борда, уделяет основное внимание случаям, когда в бюллетень внесены три кандидата (A, B и С), и рассматривает попарное сравнение кандидатов[14], однако вкладывает в данное понятие принципиально иной смысл. В отличие от Борда, при попарном сравнении кандидатов Кондорсе интересовало не количество избирателей, предпочитающих одного кандидата

[13] Cariat (Condorcet) 1785. Подробное описание работы Кондорсе см. Black 1958.

[14] Судя по всему, Кондорсе был знаком с разработками Борда по теории голосования, тем более что одна из его статей («Вычисление вероятностей») напечатана в том же томе «Истории Королевской академии наук».

другому, а сам факт победы одного над другим. Согласно Кондорсе, кандидат *А* побеждает кандидата *В* при попарном сравнении, если более половины избирателей предпочитают кандидата *А* кандидату *В*. Такой подход ведет к совершенно иной процедуре голосования.

Мнения избирателя относительно кандидатов, рассуждает Кондорсе, могут быть такими:

«*А* лучше *В*» или «*В* лучше *А*»;

«*В* лучше *С*» или «*С* лучше *В*»;

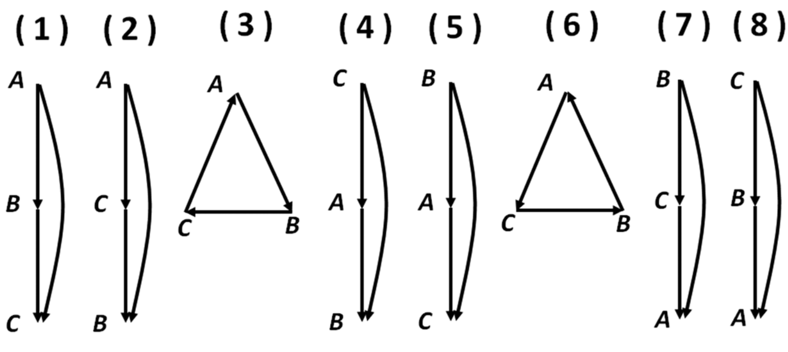
«*С* лучше *А*» или «*А* лучше *С*».

Если избиратель в состоянии упорядочить кандидатов согласно своим предпочтениям, его мнение является согласованным. Соответственно, к согласованным относятся следующие мнения:

A	*A*	*C*	*B*	*B*	*C*
B	*C*	*A*	*A*	*C*	*B*
C	*B*	*B*	*C*	*A*	*A*

При использовании правила большинства голосов возможны все восемь (2^3) вариантов коллективного решения (см. *рис. 3*; стрелка от одного кандидата к другому показывает, что большинство избирателей предпочитают первого кандидата второму).

Рисунок 3



Из восьми коллективных решений шесть (1, 2, 4, 5, 7, 8) носят согласованный характер. В этих случаях нет никаких сомнений, кто из кандидатов должен быть коллективно выбран. Оставшиеся два коллективных решения (3 и 6) Кондорсе называет противоречивыми, так как предпочтения избирателей образуют цикл, что исключает возможность определения победителя.

В каких же случаях согласованные мнения избирателей могут привести к противоречивому коллективному решению, если попарное сравнение кандидатов производится по большинству голосов? Чтобы ответить на этот вопрос, Кондорсе рассматривает пример (см. *рис. 4*), когда q_1 избирателей предпочитают кандидата A кандидату B и кандидата B кандидату C, q_2 избирателей предпочитают кандидата A кандидату C и кандидата C кандидату B, и т.д.

Рисунок 4

q_1	q_2	q_4	q_5	q_7	q_8
A	A	C	B	B	C
B	C	A	A	C	B
C	B	B	C	A	A

Общее число избирателей равно $q_1 + q_2 + q_4 + q_5 + q_7 + q_8$. Результаты попарного сранения кандидатов приведены на *рис. 5*.

Рисунок 5

	A	B	C
A	0	$\dfrac{q_1 + q_2 + q_4}{q_5 + q_7 + q_8}$	$\dfrac{q_1 + q_2 + q_5}{q_4 + q_7 + q_8}$
B	$\dfrac{q_5 + q_7 + q_8}{q_1 + q_2 + q_4}$	0	$\dfrac{q_1 + q_5 + q_7}{q_2 + q_4 + q_8}$
C	$\dfrac{q_4 + q_7 + q_8}{q_1 + q_2 + q_5}$	$\dfrac{q_2 + q_4 + q_8}{q_1 + q_5 + q_7}$	0

Из представленной на *рис. 5* матрицы видно, что противоречивое коллективное решение (A лучше B; B лучше C; C лучше A) возникает в случаях:

$$q_1 + q_2 + q_4 > q_5 + q_7 + q_8$$
$$q_4 + q_7 + q_8 > q_1 + q_2 + q_5$$
$$q_1 + q_5 + q_7 > q_2 + q_4 + q_8$$

или, если перенести все члены в левую часть неравенства:

$$(q_1 - q_8) + (q_4 - q_5) - (q_7 - q_2) > 0,$$
$$(q_4 - q_5) + (q_7 - q_2) - (q_1 - q_8) > 0,$$
$$(q_7 - q_2) + (q_1 - q_8) - (q_4 - q_5) > 0.$$

При каких же условиях не может возникнуть противоречивое коллективное решение? Очевидно, что оно невозможно в случае, если кому-то из кандидатов отдают предпочтение свыше половины избирателей. Например, если

$$q_1 + q_2 > \frac{q_1 + q_2 + q_4 + q_5 + q_7 + q_8}{2},$$

то кандидат A будет коллективно избран.

Кроме того, противоречивое коллективное решение не может возникнуть, если имеется кандидат, который при попарном сравнении превосходит каждого другого более чем на 1/3 общего числа избирателей.

Но даже если кандидат побеждает всех при попарном сравнении, это еще не гарантирует, что он является предпочтительным для коллектива. Чтобы продемонстрировать это, Кондорсе использует аппарат теории вероятностей, иллюстрируя свои рассуждения на следующем примере.

Пусть имеются 33 избирателя, чьи предпочтения относительно кандидатов *A*, *B* и *C* отражены в *табл. 1.*

Таблица 1

18 избирателей	14 избирателей	1 избиратель
A	*B*	*C*
B	*C*	*B*
C	*A*	*A*

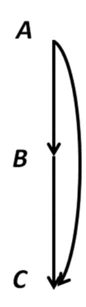
Матрица попарных сравнений кандидатов для этого случая приведена на *рис. 6.*

Рисунок 6

	A	*B*	*C*
A	0	(18, 15)	(18, 15)
B	(15, 18)	0	(32, 1)
C	(15, 18)	(1, 32)	0

Коллективное решение согласованно, и избранным должен быть кандидат *A* (см. *рис. 7*).

Рисунок 7



Обозначив через v вероятность того, что мнение избирателя о кандидатах истинно, а через e — вероятность того, что оно ложно, на основании теоремы Бернулли Кондорсе выводит следующую формулу:

вероятность того, что решение избирателя при попарном сравнении двух кандидатов (например, кандидатов A и B) истинно, равна

$$\frac{v^{h-k}}{v^{h-k}+e^{h-k}},$$

где h — число избирателей, которые считают, что A лучше B;

k — число избирателей, которые считают, что B лучше A.

Тогда для случая, приведенного в *табл. 1*, получаем:

вероятность того, что A лучше B, равна

$$\frac{v^{18-15}}{v^{18-15}+e^{18-15}} = \frac{v^3}{v^3+e^3};$$

вероятность того, что A лучше C, равна

$$\frac{v^{18-15}}{v^{18-15}+e^{18-15}} = \frac{v^3}{v^3+e^3};$$

вероятность того, что A лучше B и C (то есть вероятность того, что кандидат A должен быть избран), равна

$$\frac{v^3}{v^3+e^3}\cdot\frac{v^3}{v^3+e^3} = \frac{v^6}{v^6+2v^3e^3+e^6} = Y_1;$$

вероятность того, что B лучше C, равна

$$\frac{v^{32-1}}{v^{32-1}+e^{32-1}} = \frac{v^{31}}{v^{31}+e^{31}};$$

вероятность того, что B лучше A, равна

$$\frac{v^{18-15}}{v^{18-15}+e^{18-15}} = \frac{v^3}{v^3+e^3};$$

вероятность того, что B лучше A и C (то есть вероятность того, что кандидат B должен быть избран), равна

$$\frac{v^{31}}{v^{31}+e^{31}}\cdot\frac{e^3}{v^3+e^3} = \frac{v^{31}v^3}{v^{34}+v^{31}e^3+v^3e^{31}+e^{34}} = Y_2.$$

Если $v = 1$, $e = 0$, то $Y_1 = 1$, $Y_2 = 0$, i.e. побеждает кандидат A.

Однако существует определенный диапазон значений v, при котором $Y_2 > Y_1$. Как видно из *табл. 2*, если вероятность того, что решение избирателя при попарном сравнении кандидатов является истинным, находится в промежутке от 0,51 до 0,53, победу должен одержать кандидат B.

Таблица 2

v	0,50	0,51	0,52	0,53	0,54	0,55	0,60	0,70	0,80	0,90	1
Y_1	0,25	0,281	0,319	0,347	0,380	0,418	0,595	0,860	0,969	0,999	1
Y_2	0,25	0,365	0,406	0,401	0,379	0,353	0,229	0,073	0,015	0,001	0

Несмотря на наличие такого варианта, Кондорсе считает, что если имеется кандидат, который побеждает всех остальных при попарном сравнении, то именно он и должен быть коллективно избран. Но как быть, если такого кандидата нет (то есть присутствует противоречивое коллективное решение)? Один из возможных подходов к решению данной проблемы — признать победителем кандидата, получившего при попарном сравнении с другими кандидатами наибольшее число голосов, то есть, по сути, воспользоваться процедурой попарного сравнения, предложенной Борда.

Покажем это на следующем примере. Пусть имеются 60 избирателей, чьи предпочтения относительно кандидатов *A*, *B* и *C* отражены в *табл. 3*.

Таблица 3

23 избирателя	17 избирателей	2 избирателя	10 избирателей	8 избирателей
A	*B*	*B*	*C*	*C*
B	*C*	*A*	*A*	*B*
C	*A*	*C*	*B*	*A*

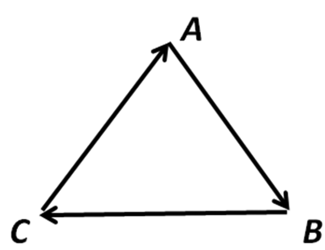
Матрица попарных сравнений кандидатов для этого случая приведена на *рис. 8*.

Рисунок 8

	A	*B*	*C*
A	0	33/27	25/35
B	27/30	0	42/18
C	32/25	18/42	0

Имеет место противоречивое коллективное решение (см. *рис. 9*).

Рисунок 9



Сумма голосов за кандидата *A*: 33+25=58;
за кандидата *B*: 27+42=69;
за кандидата *C*: 35+18=53.

Коллективно избран должен быть кандидат *B*.

Нетрудно убедиться, что такой подход абсолютно идентичен процедуре «порядок качества кандидатов», предложенной Борда.

Однако данная процедура представляется Кондорсе не оптимальной, поскольку возможны ситуации, когда при наличии согласованного коллективного решения (то есть кандидата, побеждающего всех других при попарном сравнении) она не позволяет его выявить. Рассмотрим соответствующий пример.

В *табл. 4* отражены предпочтения 81 избирателя.

Таблица 4

30 избирателей	1 избиратель	10 избирателей	29 избирателей	10 избирателей	1 избиратель	Ранг
A	*A*	*C*	*B*	*B*	*C*	*f*
B	*C*	*A*	*A*	*C*	*B*	*g*
C	*B*	*B*	*C*	*A*	*A*	*h*

Из матрицы попарных сравнений кандидатов, приведенной на *рис. 10*, видно, что существует согласованное коллективное решение — кандидат *A*.

Рисунок 10

	A	*B*	*C*
A	0	41/40	60/21
B	40/41	0	69/12
C	21/60	12/69	0

Для того чтобы кандидат *A* был бы выбран по описанной выше процедуре, числа f, g и h нужно подобрать таким образом, чтобы $f > g > h$, и при этом числовая оценка кандидата *A* должна быть выше числовой оценки кандидата *B*, то есть должно выполняться неравенство:

$$30 \cdot f + 1 \cdot f + 10 \cdot g + 29 \cdot g + 10 \cdot h + 1 \cdot h > 30 \cdot g + 1 \cdot h + 10 \cdot h + 29 \cdot f + 10 \cdot f + 1 \cdot g.$$

Приведя подобные члены, приходим к противоречию: $g > f$.

И хотя, по признанию самого Кондорсе, такой неправильный (с его точки зрения) результат данная процедура дает довольно редко, он предлагает другой метод определения лучшего кандидата в случае противоречивого коллективного решения — удалить из рассмотрения ту стрелку на графе попарных сравнений, которая соответствует наименьшему превосходству одного кандидата над другим.

На *рис. 11* приведен граф попарных сравнений для примера, представленного в *табл. 3*.

Рисунок 11

Кандидат *A* имеет наименьшее превосходство над кандидатом *B* (33 против 27), и, значит, стрелка *AB* должна быть удалена (см. *рис. 12*).

Рисунок 12

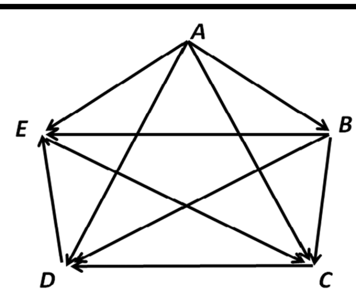
Победителем должен быть признан кандидат *B*.

В работе Кондорсе рассматриваются и случаи, когда число кандидатов больше трех. Например, анализируется ситуация с пятью кандидатами (*A*, *B*, *C*, *D*, *E*), попарное сравнение которых избирателями дало следующий результат:

A > B	A > C	A > D	A > E	B > C
B > D	B > E	C > D	E > C	D > E

Граф попарных сравнений приведен на *рис. 13*.

Рисунок 13



По заключению Кондорсе, лучшим в такой ситуации должен быть признан кандидат *A* как победивший всех других кандидатов при попарном сравнении. Вторым в коллективном предпочтении является кандидат *B*, уступивший в попарном сравнении лишь кандидату *A*. Противоречия возникают только между кандидатами *C*, *D* и *E*.

Случаи, когда при наличии более трех кандидатов среди них нет такого, который бы при попарных сравнениях побеждал всех остальных, описаны Кондорсе очень кратко и без поясняющих примеров, так что довольно сложно понять, как в такой ситуации должна выглядеть процедура определения победителя[15]. Одна из возможных интерпретаций заключается в том, что, если на графе попарных сравнений нет безусловного победителя, нужно отбрасывать поочередно все дуги с наименьшим превосходством одного кандидата над другим до тех пор, пока не появится кандидат, к которому не подходит ни одной стрелки. Этот кандидат и считается избранным.

[15] *На это еще более 100 лет назад обратил внимание английский математик Э.Дж.Нансон (см. British Government blue book 1907: 137).*

* * *

Работы Борда и Кондорсе расширили арсенал методов, применяемых при голосовании, дополнив их двумя новыми (упорядочение внесенных в бюллетень кандидатов по степени предпочтительности и метод попарных сравнений). Однако их значение этим не ограничивается. Благодаря этим работам возникло осознание того, что понятие «большинство голосов» далеко не однозначно и использование его для определения победителя на выборах может приводить к парадоксальным результатам. Стало очевидно, что голосование — научная проблема, и в ее решение включились крупные ученые.

Библиография

Алескеров Ф.Т., Ортешук П. 1995. *Выборы. Голосование. Партии*. — М.

Аристотель. 1997. *Политика. Афинская полития*. — М.

Вольский В.И. 2011а. О вкладе Раймунда Луллия в теорию голосования // *Полития*. № 1.

Вольский В.И. 2011б. Николай Кузанский и его система голосования // *Полития*. № 3.

Лосев А.Ф. 1979. *Эллинистически-римская эстетика I—II вв. н.э.* — М.

Муллен Л. 2002. *Повседневная жизнь средневековых монахов Западной Европы X—XV веков*. — М.

Плутарх. 1994. *Сравнительные жизнеописания*. — М.

Black D. 1958. *The Theory of Committees and Elections*. — Cambridge.

Borda J.C. 1784. Mémoire sur les élections au scrutin // *Histoire de l'Académie Royale des Sciences pour 1781*. — P.

British *Government Blue Book*. 1907. № 3.

Cariat M.J.A.N., marquis de Condorcet. 1785. *Essai sur l'application de l'analyse á la probabilité decisions rendues á la pluralité des voix*. — P.

Hägele G., Pukelsheim F. 2001. Llull's Writings on Electoral Systems // *Studia Lluliana*. Vol. 41.