А.В.Соколова

КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ УЧАСТНИКОВ ПРИ ПРИНЯТИИ КОЛЛЕКТИВНЫХ РЕШЕНИЙ

Использование количественных методов при изучении влияния игроков, участвующих в принятии коллективных решений, имеет уже более чем полувековую историю. Так, еще в 1954 г. Л.Шепли и М.Шубик разработали индекс, позволяющий оценивать влияние участников при принятии коллективных решений[1]. Их работа имела большое значение для развития теории игр, однако не получила такого общественного резонанса, как работа Дж.Банцафа, где доказывалось, что общепринятое представление о наличии строгой зависимости между числом депутатских мест, которыми располагает партия, и ее влиянием в парламенте ошибочно[2]. Предложенный Банцафом порядок оценки влияния, основанный на вероятностном подходе (индекс и мера влияния Банцафа), до сих пор широко применяется при проведении соответствующих расчетов. Помимо индексов Банцафа и Шепли—Шубика, существуют также индексы влияния Джонстона[3], Дигена—Пакела[4], Холлера—Пакела[5] и др.

Настоящая работа посвящена описанию различных индексов влияния и практического их применения.

[1] *Shapley, Shubik 1954.*

[2] *Banzhaf 1965.*

[3] *Johnston 1978.*

[4] *Deegan, Packel 1978.*

[5] *Holler, Packel 1983.*

Индексы влияния для двух альтернатив

Рассмотрим ситуацию, когда группе из n игроков (это могут быть партии в парламенте, министры в совете, члены правления и т.п.) предстоит принять совместное решение. Если в этой группе нет диктатора, способного навязать свою волю, для принятия такого решения создаются коалиции. Коалиция, которая в состоянии принять решение без голосов остальных игроков, называется *выигрывающей*. В каждой выигрывающей коалиции имеются *ключевые* игроки, лишившись которых коалиция становится проигрывающей.

Индекс влияния Банцафа рассчитывается по доле коалиций, в рамках которых данный игрок оказывается ключевым. Если b_i — это число коалиций, где игрок i является ключевым, то индекс Банцафа (β) для него составляет:

$$\beta(i) = \frac{b_i}{\sum_j b_j}.$$

Мерой влияния Банцафа (β') называется отношение числа коалиций b_i к числу всех возможных коалиций с участием игрока *i*:

$$\beta'(i) = \frac{b_i}{2^{n-1}}.$$

Значения индекса и меры влияния Банцафа могут меняться в диапазоне от нуля до единицы. Однако в отличие от индекса Банцафа, представляющего собой относительную величину, мера Банцафа — величина абсолютная: если игроки А и В по каким-либо причинам не будут вступать в коалицию, то это отразится на индексе Банцафа всех игроков, тогда как мера Банцафа изменится только для игроков А и В. Причина в том, что сумма всех индексов Банцафа в одной игре составляет единицу и, соответственно, при уменьшении индекса влияния одного игрока индекс влияния других увеличивается, то есть происходит перераспределение влияния. Сумма же мер Банцафа не равна единице, и влияние игрока зависит исключительно от него самого, от его способности играть ключевую роль в выигрывающих коалициях.

В качестве примера рассмотрим парламент, состоящий из 100 мест, в котором представлены 3 партии (А, В, С), располагающие 50, 49 и 1 голосом соответственно. Если решения принимаются простым большинством, выигрывающими в этом парламенте будут коалиции А+В, А+С и А+В+С.

Попробуем рассчитать индекс и меру Банцафа для партии А, которая выступает ключевым игроком во всех трех коалициях:

$$\beta(A) = \frac{3}{3+1+1} = \frac{3}{5};$$

$$\beta'(A) = \frac{3}{2^{3-1}} = \frac{3}{4}.$$

Проведя аналогичные расчеты для партий В и С, каждая из которых является ключевым игроком лишь в одной коалиции (А+В и А+С соответственно), получаем:

$$\beta(B) = \beta(C) = \frac{1}{3+1+1} = \frac{1}{5};$$

$$\beta'(B) = \beta'(C) = \frac{1}{2^{3-1}} = \frac{1}{4}.$$

Таким образом, мы видим, что влияние партии на принятие решений ни в коей мере не пропорционально числу голосов, которыми она располагает. Обладая в 49 раз бóльшим количеством голосов, чем партия С, партия В имеет такие же индекс и меру Банцафа, которые при этом в три раза ниже, чем у партии А, опережающей ее всего на один голос.

Конечно, диспропорции такого масштаба встречаются довольно редко, но сами по себе нарушения пропорциональности — явление повсеместное. Для подтверждения этого тезиса достаточно проанализировать распределение влияния в любом коллегиальном органе, например в Совете министров Европейского Союза. Как видно из приводимых в *табл. 1* и *2* данных, в 1958—1973 гг. Люксембург, несмотря на наличие голоса в Совете министров ЕС, не имел там никакого влияния[6], а в 1981—1985 гг. его влияние на принятие решений было таким же, как у Дании, в 14 раз превосходящей его по численности населения.

[6] *Brams 1975.*

Таблица 1 **Распределение влияния в Совете министров Европейского Союза в 1958—1973 гг.**

Страна	*Число голосов*	*Индекс Банцафа*
Франция	4	0,238
Германия	4	0,238
Италия	4	0,238
Бельгия	2	0,143
Нидерланды	2	0,143
Люксембург	1	0

Таблица 2 **Распределение влияния в Совете министров Европейского Союза в 1981—1985 гг.**

Страна	*Число голосов*	*Индекс Банцафа*
Франция	10	0,158
Германия	10	0,158
Италия	10	0,158
Великобритания	10	0,158
Нидерланды	5	0,082
Бельгия	5	0,082
Греция	5	0,082
Дания	3	0,041
Ирландия	3	0,041
Люксембург	2	0,041

Индекс Банцафа, дающий распределение влияния в процентах, является более показательным и наглядным, чем мера Банцафа. Вместе с тем в силу своей относительности он порождает целый ряд парадоксов[7]. К их числу относятся «парадокс новых игроков» (в случае включения в игру дополнительного игрока индекс влияния старых игроков не уменьшается, а увеличивается), «парадокс перераспределения» (когда часть голосов игрока А передается игроку В — при сохранении у

[7] *См. Felsenthal, Machover 1998.*

остальных игроков прежнего числа голосов, — индекс влияния игрока А возрастает, а не сокращается) и др. Поэтому к индексу Банцафа обычно прибегают при анализе соотношения сил в рамках одного парламента. При сравнении влияния игроков в разных парламентах или в одном парламенте в разные периоды времени удобнее использовать меру Банцафа.

Индексы влияния Шепли—Шубика, Джонсона, Дигена—Пакела также рассчитываются на основании доли выигрывающих коалиций, в которых соответствующий игрок играет ключевую роль. Однако у них есть и своя специфика. Индекс Шепли—Шубика, в отличие от индекса Банцафа, приписывает разным коалициям разный вес. В индексе Джонсона учитывается общее число ключевых игроков в коалиции: наибольшим влиянием обладает игрок, являющийся в своей коалиции единственным ключевым. Наконец, при вычислении индекса Дигена—Пакела принимаются во внимание только минимальные выигрывающие коалиции, все участники которых играют ключевую роль.

Очевидно, что важной характеристикой влияния игрока является его способность блокировать принимаемые решения. Оценить эту способность позволяет индекс влияния Дж.Коулмана (γ)[8], который вычисляется по формуле:

[8] *Coleman 1971.*

$$\gamma(i) = \frac{b_i}{\omega},$$

где b_i — число коалиций, в которых партия i является ключевой, а ω — общее число всех выигрывающих коалиций.

Рассчитаем индекс Коулмана для партий A, B и C из рассмотренного выше примера:

$$\gamma(A) = \frac{3}{3} = 1;$$

$$\gamma(B) = \gamma(C) = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, влияние партии A, входящей в состав всех выигрывающих коалиций, равно единице, так как эта партия может заблокировать любое решение в данном парламенте.

Индексы влияния для трех альтернатив

Классические индексы влияния исходят из предположения о наличии двух вариантов голосования — «за» либо «против». Однако во многих случаях, помимо права голосовать за предлагаемое решение или против него, игрокам предоставлено право воздержаться от голосования. Ситуации, связанные с возможностью голосования по трем и более альтернативам, вызывают в последнее время все больший интерес у исследователей. В результате в традиционные индексы стали вноситься коррективы, позволяющие использовать их при анализе распределения влияния в подобных ситуациях. Рассмотрим модифицированный индекс Банцафа для трех альтернатив[9].

[9] Felsenthal, Machover 1998.

Предположим, что при принятии решений у игроков имеются три альтернативы: проголосовать «за», проголосовать «против» и «воздержаться». Будем называть выигрывающей коалицией множество игроков, голосующих «за», чьих голосов достаточно, чтобы принять решение без голосов остальных игроков. По-прежнему ключевыми остаются игроки, при выходе которых из выигрывающей коалиции она превращается в проигрывающую.

Модифицированный индекс влияния Банцафа для трех альтернатив (β_3) можно вычислить по формуле:

$$\beta_3\ (i) = \frac{b'_i}{\sum_j b'_j},$$

где b'_i — число распределений голосов между тремя альтернативами, в которых игрок i голосует «за» и является ключевым.

Соответственно, мерой влияния Банцафа для трех альтернатив (β_3') будет отношение числа распределений b_i к числу всех возможных распределений голосов, когда игрок i голосует «за»:

$$\beta_3'\ (i) = \frac{b'_i}{3^{n-1}}.$$

Вернемся к приводившемуся в предыдущем разделе примеру и попытаемся определить индекс и меру влияния Банцафа для партий А, В и С при наличии трех альтернатив.

Для того чтобы оценить влияние партии А, прежде всего необходимо рассмотреть все возможные распределения голосов, в которых эта партия голосует «за» (см. *табл. 3*).

Таблица 3 **Возможные распределения голосов, когда партия А голосует «за»**

	«За»	*«Против»*	*«Воздержался»*
1	A	B	C
2	A	B+C	—
3	A	—	B+C
4	A	C	B
5	A+B	C	—
6	A+B	—	C
7	A+C	B	—
8	A+C	—	B
9	A+B+C	—	—

Таким образом, партия А оказывается ключевым игроком в распределениях 5, 6, 7, 8 и 9. Соответственно, индекс и мера влияния Банцафа для нее будут выглядеть следующим образом:

$$\beta_3\ (A) = \frac{5}{5+2+2} = \frac{5}{9};$$

$$\beta_3'\ (A) = \frac{5}{3^{3-1}} = \frac{5}{9}.$$

Проведя аналогичные расчеты применительно к партиям В и С, получим:

$$\beta_3\ (B) = \beta_3\ (C) = \frac{2}{5+2+2} = \frac{2}{9};$$

$$\beta_3'\ (B) = \beta_3'\ (C) = \frac{2}{9}.$$

В рассматриваемом случае индекс и мера влияния Банцафа совпали, однако такое совпадение является скорее исключением, чем правилом.

Индексы влияния, учитывающие предпочтения участников

Индекс Банцафа и другие классические индексы исходят из предположения, что все игроки могут вступать в коалиции друг с другом и все коалиции равновероятны. Конечно, на практике это далеко не так. По сути дела, эти индексы измеряют «априорное» влияние, или *потенциал* каждого игрока — что он *мог бы* сделать, обладая тем или иным количеством голосов. Чтобы измерить *реальное*, «апостериорное» влияние, необходимо проанализировать характер взаимоотношений между игроками и оценить вероятность возникновения той или иной коалиции.

Один из подходов к оценке апостериорного влияния нашел отражение в индексе влияния, введенном Ф.Т.Алескеровым[10], в котором учитываются предпочтения игроков относительно партнеров по коалиции. Индекс Алескерова (α) для каждого игрока i рассчитывается на основе суммы функций сил связи $f(i, \omega)$ игрока i по всем коалициям ω, где он является ключевым игроком:

$$\alpha(i) = \frac{\chi_i}{\sum_j \chi_j},$$

где $\chi_i = \sum_\omega f(i,\omega)$.

[10] Aleskerov 2006. О других подходах к оценке апостериорного влияния см., напр., Алескеров и др. 2007; Алескеров, Очур 2007.

Логика построения данного индекса аналогична логике построения индекса Банцафа с той лишь разницей, что в последнем случае вместо χ_i подсчитывается число коалиций, в которых игрок *i* является ключевым.

По Алескерову, желание партии *i* вступить в коалицию с партией *j* выражается реальным числом p_{ij} ($p_{ij} \in [0;1]$ $i.j = 1,2...n$). В общем случае предполагается, что $p_{ij} \neq p_{ji}$, но для простоты рассмотрим случай, когда эти величины совпадают. Величину p_{ij} можно назвать силой связи *i* с *j,* и она может интерпретироваться как вероятность вступления *i* в коалицию с *j*.

Существует несколько способов вычисления функции силы связи[11]. В частности, она может рассчитываться как характеристика самой коалиции, не зависящая от конкретного игрока:

[11] В работе Алескерова описаны 14 видов функции силы связи (см. Aleskerov 2006).

$$f^{+}_{\min}(\omega) = \min_{i,j} p_{ij} .$$

В данном случае функция силы связи определяется исходя из наименьшей в рамках анализируемой коалиции силы связи между игроками. Например, если сила связи (вероятность образования коалиции) между игроками A и B равна 20%, между игроками A и C — 30%, а между игроками B и C — 50%, функция силы связи коалиции A+B+C будет составлять 20%.

Допустим, что в парламенте, насчитывающем 100 мест, представлены партии D, E и F, располагающие 50, 30 и 20 голосами соответственно. Правило принятия решения — простое большинство. Сила связи между партиями — $p_{DE} = 0{,}2$; $p_{DF} = 0{,}5$; $p_{EF} = 0{,}8$. Выигрывающие коалиции — D+E, D+F и D+E+F. Рассчитаем значения функции связи для каждой выигрывающей коалиции:

$$f^{+}_{\min}(D+E) = \min_{i,j} p_{ij} = \min\{0{,}2\} = 0{,}2 ;$$

$$f^{+}_{\min}(D+F) = \min\{0{,}5\} = 0{,}5 ;$$

$$f^{+}_{\min}(D+E+F) = \min\{0{,}2;0{,}5;0{,}8\} = 0{,}2 .$$

Тогда индексы влияния Алескерова будут выглядеть следующим образом:

$$\alpha(D) = \frac{0{,}2+0{,}5+0{,}2}{0{,}9+0{,}2+0{,}5} = \frac{0{,}9}{1{,}6} = \frac{9}{16} = 0{,}56 ;$$

$$\alpha(E) = \frac{0{,}2}{1{,}6} = \frac{1}{8} = 0{,}125;$$

$$\alpha(F) = \frac{0{,}5}{1{,}6} = \frac{5}{16} = 0{,}31.$$

Индекс эффективности влияния

Потенциальное (априорное) влияние игрока, измеряемое индексом Банцафа, связано исключительно с правилом принятия решений и распределением голосов между игроками. Реальное же его влияние зависит от того, каким образом он выстраивает свои отношения с другими игроками (конечно, в рамках тех возможностей, которые определяются его потенциалом). Для того чтобы оценить, насколько эффективно игрок использовал свой потенциал, вводится индекс эффективности влияния как отношение реального влияния к потенциальному:

$$\varepsilon(i) = \frac{\alpha(i)}{\beta(i)} \cdot 100\% \cdot$$

Оценка потенциального влияния в данном случае осуществляется на основе индекса Банцафа, а влияния реального — на основе индекса Алескерова. Очевидно, однако, что вместо индекса Банцафа может быть использован другой классический индекс влияния, а вместо индекса Алескерова — другой индекс, оценивающий реальное влияние.

Поскольку индексы α и β — величины относительные, индекс эффективности влияния тоже является относительной величиной. Если один из игроков не до конца использовал свой потенциал, то у другого игрока в силу перераспределения влияния индекс α может оказаться больше индекса β. Иными словами, реальное влияние игрока может быть выше потенциального, а следовательно, индекс эффективного влияния игрока может превышать 100%.

Рассчитаем индекс эффективности партий D, E и F из рассмотренного в предыдущем разделе примера. Индекс Банцафа для этих партий составляет:

$$\beta(D) = \frac{3}{3+1+1} = \frac{3}{5} = 0{,}6\,;$$

$$\beta(E) = \beta(F) = \frac{1}{3+1+1} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Тогда индекс эффективности влияния будет выглядеть следующим образом:

$$\varepsilon(D) = \frac{0{,}56}{0{,}6} \cdot 100 = 93\%;$$

$$\varepsilon(E) = \frac{0{,}125}{0{,}2} \cdot 100 = 62{,}5\%;$$

$$\varepsilon(F) = \frac{0{,}31}{0{,}2} \cdot 100 = 124\%.$$

Иначе говоря, наиболее эффективной в данном парламенте является партия F.

Использование индексов влияния при анализе работы выборных органов (на примере Государственной Думы РФ третьего созыва)

Попробуем на основании описанных выше индексов оценить распределение влияния в Государственной Думе РФ третьего созыва (1999—2003 гг.). Названия фракций и депутатских групп, а также данные об их численности (по состоянию на январь—февраль 2000 г.) представлены в *табл. 4*.

Рассчитывать индекс и меру Банцафа для трех альтернатив в данном случае нецелесообразно, поскольку, как показывает практика, альтернатива «воздержаться» депутатами практически не используется.

При расчете индекса Алескерова в качестве показателя силы связи p_{ij} были использованы средние значения индекса согласованности позиций по специально отобранным голосованиям, проходившим в январе—феврале 2000 г. Этот индекс измеряет степень согласованности голосования двух групп по одному вопросу[12] и вычисляется по формуле:

[12] *Благовещенский 2004.*

$$c(q_1, q_2) = 1 - \frac{|q_1 - q_2|}{\max(q_1, 1 - q_1, q_2, 1 - q_2)},$$

где q_1 и q_2 — доля проголосовавших «за» в первой и второй группах соответственно. Если позиции групп совпадают (например, в обеих

Таблица 4 **Фракции Государственной Думы РФ третьего созыва**

Название фракции/группы	*Число мест в парламенте*
КПРФ	91
«Единство»	82
ОВР	46
СПС	32
ЛДПР	17
«Яблоко»	21
Агропромышленная депутатская группа	39
«Народный депутат»	57
«Регионы России»	41
Независимые депутаты	15

группах «за» проголосовали по 30%, то есть $q_1 = q_2$), индекс согласованности равен единице, если «противоположны» (например, $q_1 = 0$ и $q_2 = 1$), — нулю.

Значения индекса и меры Банцафа, индекса Коулмана, индекса Алескерова и индекса эффективности влияния для Госдумы третьего созыва приведены в *табл. 5*.

Таблица 5 **Распределение влияния в Государственной Думе третьего созыва**

	Индекс Банцафа	*Мера Банцафа*	*Индекс Коулмана*	*Индекс Алескерова*	*Индекс эффективности влияния*
КПРФ	0,22	0,49	0,51	0,2	96,12
«Единство»	0,19	0,42	0,44	0,2	102,72
ОВР	0,1	0,22	0,23	0,1	101,63
СПС	0,07	0,15	0,16	0,07	92,88
ЛДПР	0,03	0,08	0,08	0,03	97,95
«Яблоко»	0,04	0,09	0,1	0,04	98,61
Агропромышленная депутатская группа	0,08	0,18	0,19	0,09	100,34
«Народный депутат»	0,13	0,28	0,3	0,14	103,29
«Регионы России»	0,09	0,2	0,21	0,09	103,04
Независимые депутаты	0,03	0,07	0,07	0,03	100,58

Как видно из *табл. 5*, самой эффективной в Государственной Думе третьего созыва была группа «Народный депутат», а наименее эффективной — фракция СПС. Не в полной мере был реализован и потенциал КПРФ ($\varepsilon = 96{,}12$), хотя имевшееся у коммунистов число голосов позволяло им играть ключевую роль в более чем 50% выигрывающих коалиций ($\gamma = 0{,}51$). Обладавшая тем же реальным влиянием фракция «Единство» ($\alpha = 0{,}2$), действовала эффективнее фракции КПРФ ($\varepsilon = 102{,}72$), поскольку ее изначальные возможности были ниже.

* * *

Итак, мы рассмотрели основные подходы к оценке влияния игроков при принятии коллективных решений. Индекс и мера Банцафа и другие классические индексы измеряют потенциальное (априорное) влияние игроков, зависящее только от распределения голосов и правила принятия решений. Индекс влияния Алескерова оценивает реальное (апостериорное) влияние игроков, принимая в расчет их предпочтения в отношении партнеров по коалиции. Индекс Коулмана позволяет оценить способность участников воспрепятствовать принятию решений. А индекс эффективности влияния показывает, в какой мере игроки реализовали свои потенциальные возможности.

Индексы влияния имеют не только научное, но и практическое значение. Они используются при оценке влияния членов различных советов и правлений, при выработке правил принятия решений, при формировании коалиционной политики и во многих других областях.

Библиография

Алескеров Ф.Т., Благовещенский Н.Ю., Сатаров Г.А., Соколова А.В., Якуба В.И. 2007. *Влияние и структурная устойчивость в российском парламенте (1905—1917 и 1993—2005 гг.)*. — М.

Алескеров Ф.Т., Очур О.А. 2007. *Обобщенные индексы Шепли—Оуэна и распределение влияния в Государственной Думе III созыва*. — М.

Благовещенский Н.Ю. 2004. *Индекс согласованности позиций групп в выборных органах*. — М.

Aleskerov F. 2006. Power Indices Taking into Account Agent's Preferences // Simeone B., Pukelsheim F. (eds.) *Mathematics and Democracy*. — Berlin.

Banzhaf J.F. 1965. Weighted Voting Doesn't Work: A Mathematical Analysis // *Rutgers Law Review*. Vol. 19.

Brams St.J. 1975. *Game Theory and Politics*. — N.Y.

Coleman J.S. 1971. Control of Collectivities and the Power of a Collectivity to Act // *Social Choice*. — N.Y.

Deegan J., Packel E.W. 1978. A New Index of Power for Simple n-Person Games // *International Journal of Game Theory*. Vol. 7. № 2.

Felsenthal D.S., Machover M. 1998. *The Measurement of Voting Power: Theory and Practice, Problems and Paradoxes*. — Cheltenham, Northampton.

Holler M.J., Packel E.W. 1983. Power, Luck and the Right Index // *Journal of Economics*. Vol. 43.

Johnston R.J. 1978. On the Measurement of Power: Some Reactions to Laver // *Environment and Planning*. Vol. 10.

Shapley L.S., Shubik M. 1954. A Method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System // *American Political Science Review*. Vol. 48. № 3.